В.И. Митенков

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Минск
БГУ

Справочный материал
Алгебра и начала анализа

I. Преобразования алгебраических выражений

Числовые множества

$\boldsymbol{N} = \{1,2,3,4,5,....\}$ – множество натуральных чисел

$\boldsymbol{Z} = \{... -3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ – множество целых чисел

$\boldsymbol{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \, m \in Z, n \in N \right\}$ – множество рациональных чисел (чисел, которые можно представить в виде обыкновенной дроби)

$\boldsymbol{R} = (-\infty; +\infty)$ – множество всех действительных чисел

$\boldsymbol{R}\backslash\boldsymbol{Q}$ – множество иррациональных чисел (множество $\boldsymbol{R}$ без множества $\boldsymbol{Q}$)

Свойства степеней

Для любых n, k и положительных a и b верны равенства:

$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad 1^n = 1$

$0^n = 0 \; \left(0^0 - \textit{не имеет смысла}\right)$

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$

$a^n : a^k = a^{n-k}$

$\left(a^n\right)^k = \left(a^k\right)^n = a^{nk}$

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$

Формулы сокращенного умножения (разложения на множители)

Для любых a и b верны равенства:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \textit{или} \quad (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \textit{или} \quad (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$

Разложение на множители квадратного трехчлена

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \textit{ где } x_1, x_2 - \textit{корни}$

Нужно отметить, что при $D = 0$ $x_1 = x_2$ и разложение принимает вид $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Арифметические корни и их свойства

$\sqrt[2n+1]{-x} = -\sqrt[2n+1]{x}, \quad x \geq 0$

$\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|, \; x \in R$, *в частности* $\sqrt{x^2} = |x|$, <u>но</u> $\left(\sqrt[2n]{x}\right)^{2n} = x$ (здесь $x \geq 0$)

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[mk]{a^{nk}}=\sqrt[m]{a^n}$$

Абсолютная величина числа (модуль)

Определение: $|a|=\left[\begin{array}{l} a,\ при\ a\ge 0 \\ -a,\ при\ a\le 0\end{array}\right.$

$|a|\ge 0,\quad |-a|=|a|,\quad |a|=0\Leftrightarrow a=0$

$|a|^{2n}=a^{2n}$

$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$$

Важные неравенства

при $a>0$ верно $a+\dfrac{1}{a}\ge 2$, причем равенство выполняется только при $a=1$;

при $a>0$ и $b>0$ верно $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$, причем равенство выполняется только при $a=b$;

$|a+b|\le|a|+|b|$, причем равенство выполняется только, если a и b одного знака (или одно из чисел равно нулю)

II. Числовые функции

Пусть задано некоторое числовое множество X и указан закон f, по которому *каждому числу* $x\in X$ *ставится в соответствие единственное число* y. Тогда говорят, что задана *функция* $y=f(x)$ с *областью определения* X. Множество Y всех значений y, для каждого из которых существует по крайней мере одно число $x\in X$ такое, что $y=f(x)$, называется *областью значений функции* f. Обычно область определения обозначают $D(f)$, а область значений – $E(f)$; переменная x – *независимая переменная (аргумент),* y – *зависимая переменная*.

Графиком числовой функции $y=f(x)$ называется множество точек координатной плоскости xOy с координатами $(x, f(x))$, где $x\in D(f)$.

Основные способы задания функции:

1) *аналитический* способ состоит в задании функции формулой $y=f(x)$;
2) *табличный* способ состоит в составлении таблицы соответствующих значений x и y;
3) *графический* способ состоит в задании графика функции.

Число x_0 из области определения функции называется *нулем* функции $y=f(x)$, если $f(x_0)=0$.

Функцию $y=f(x)$ называют *возрастающей* на промежутке (a,b), если для любых $x_1,x_2\in(a,b)$ таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

Функцию $y=f(x)$ называют *убывающей* на промежутке (a,b), если для любых $x_1,x_2\in(a,b)$ таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Функцию, возрастающую или убывающую на всей области определения, называют *монотонной*.

Функцию $y=f(x)$ называют *периодической* на области определения $D(f)$, если существует такое число $T>0$ (*период функции*), что выполняются два условия:

1) если $x \in D(f)$, то и $x \pm T \in D(f)$;

2) для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x \pm T) = f(x)$.

Если число T – период функции, то любое число $kT, k \in Z, k \neq 0$ также является периодом функции. Число T еще называют *наименьшим положительным периодом (основным периодом).*

Функцию $y = f(x)$ называют *четной*, если выполняются два условия:

1) область определения – симметричное относительно точки $O(0,0)$ множество, т.е. наряду с любым $x \in D(f)$ число $-x$ также принадлежит $D(f)$;

2) для любого x из области определения $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Функцию $y = f(x)$ называют *нечетной*, если выполняются два условия:

1) область определения – симметричное относительно точки $O(0,0)$ множество;

2) для любого x из области определения $f(-x) = -f(x)$.

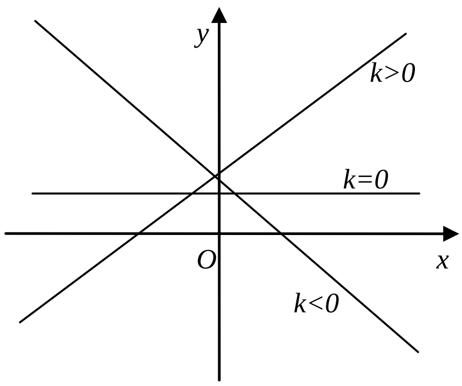
График нечетной функции симметричен относительно начала координат $O(0,0)$.

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения X и областью значений Y, которая разным значениям аргумента ставит в соответствие разные числа. Функция, которая имеет область определения Y и область значений X и каждому $y_0 \in Y$ ставит в соответствие $x_0 \in X$ так, что $f(x_0) = y_0$, называется *обратной к функции* $f(x)$ и обозначается $x = f^{-1}(y)$. Следовательно, при любом x из множества X имеет место тождество $f^{-1}(f(x)) \equiv x$. Пара функций f и f^{-1} называется *парой взаимно обратных функций*. Как правило, независимые переменные взаимно обратных функций f и f^{-1} обозначаются одной и той же буквой (обычно x), значения этих функций – также одной буквой (обычно y).

Достаточный признак существования обратной функции: если функция строго возрастает (убывает), то для нее существует обратная функция, и она также строго возрастает (убывает).

Для того чтобы найти обратную функцию для функции $y = f(x)$ достаточно выразить переменную x через y, а затем переименовать переменные.

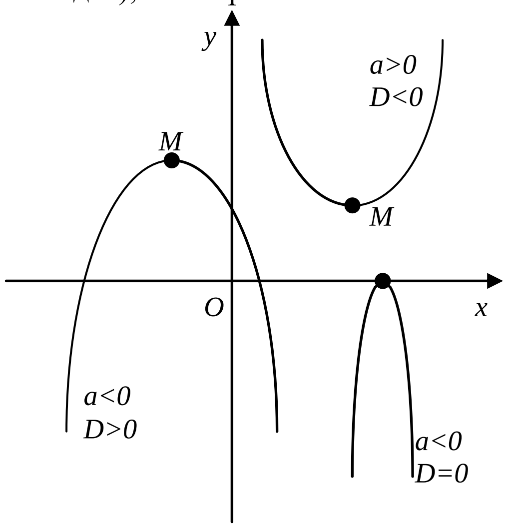
Линейная функция задается уравнением $y = kx + b$, $k \in R$, $b \in R$.
Область определения – $D(f) = R$, область значений – $E(f) = R$ при $k \neq 0$, $E(f) = \{b\}$ при $k = 0$. Функция возрастает при $k > 0$, убывает при $k < 0$, постоянна при $k = 0$. График – прямая линия.



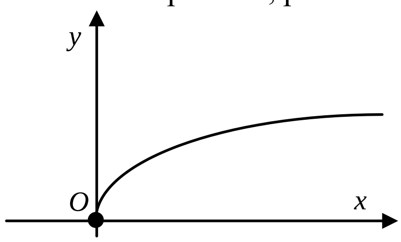
Квадратичная функция (*квадратный трехчлен*) задается уравнением
$y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Область определения – $D(f) = R$. График функции – парабола с осью симметрии $x = -\dfrac{b}{2a}$, вершиной в точке $M\left(x_0, ax_0^2+bx_0+c\right)$, где $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, и ветвями, направленными вверх (при $a>0$) или вниз (при $a<0$). Область значений – $E(f)=\begin{cases}\left(-\infty; ax_0^2+bx_0+c\right] \text{\textit{при} } a<0,\\ \left[ax_0^2+bx_0+c;+\infty\right) \text{\textit{при} } a>0.\end{cases}$

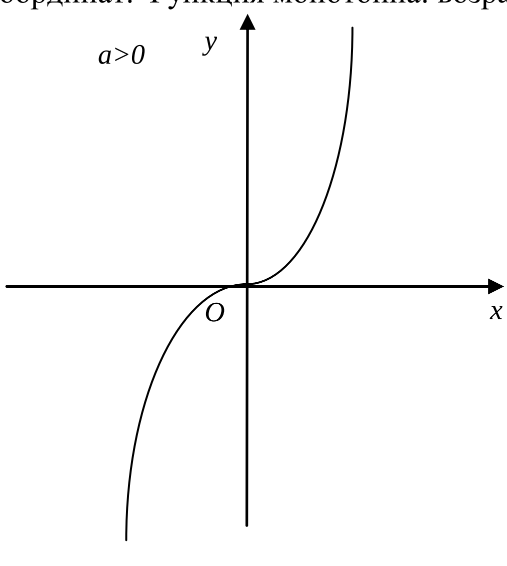
Выражение $D=b^2-4ac$ называется *дискриминантом*. При положительном дискриминанте квадратный трехчлен имеет два *нуля*, т.е. парабола дважды пересекает ось абсцисс; при отрицательном – нулей нет, т.е. точек пересечения с осью абсцисс у параболы нет; при $D=0$ – нуль один (кратности два), т.е. парабола касается оси абсцисс.

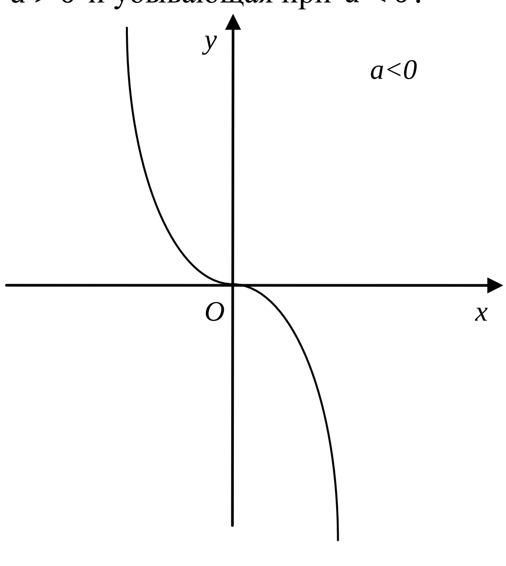


Функция арифметического квадратного корня задается уравнением $y=\sqrt{x}$. Область определения – $D(f)=[0;+\infty)$, область значений – $E(f)=[0;+\infty)$. Функция является возрастающей. Графиком является часть параболы, расположенной горизонтально.

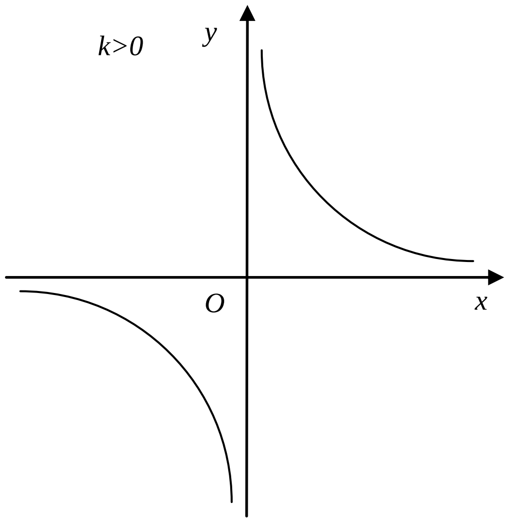


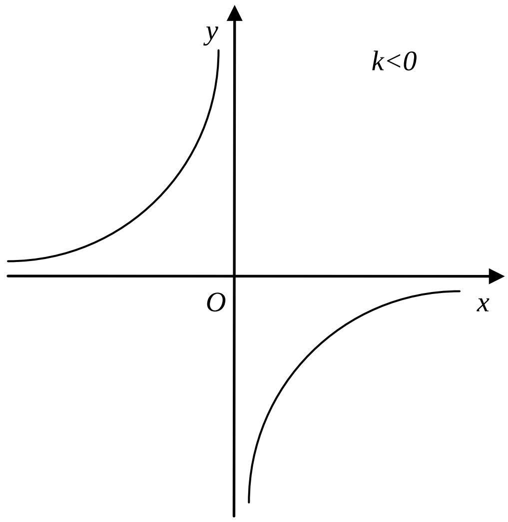
Кубическая функция задается уравнением $y=ax^3$, $a\neq 0$. Область определения – $D(f)=R$, область значений – $E(f)=R$. Функция является нечетной, т.е. график (кривую иногда называют *кубической параболой*) симметричен относительно начала координат. Функция монотонна: возрастающая при $a>0$ и убывающая при $a<0$.





Функция обратной пропорциональности задается формулой $y=\dfrac{k}{x}$, $k \neq 0$.
Область определения $-D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, область значений $-$ $E(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Функция является нечетной, т.е. график (кривая называется *гиперболой*) симметричен относительно начала координат. Ось абсцисс является горизонтальной асимптотой, ось ординат – вертикальной асимптотой (*асимптота* – прямая, к которой неограниченно приближается график функции, но не пересекает ее). Функция не является монотонной, однако, если $k>0$, то функция является убывающей на интервалах $(-\infty;0),(0;+\infty)$, и, если $k<0$, то функция возрастает на интервалах $(-\infty;0),(0;+\infty)$.





III. Алгебраические уравнения

Область допустимых значений (ОДЗ) уравнения – множество всех значений переменной (-ых), при которых все функции, входящие в уравнение, имеют смысл.

Решения (корни) уравнения – такие значения переменной (-ых), которые при подстановке в уравнение обращают его в верное числовое равенство.

Решить уравнение означает найти все его корни или доказать, что их нет.

Уравнения называют *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$ имеет решения $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при неотрицательном дискриминанте $D=b^2-4ac$. Если коэффициент b – четный, т.е. $b=2k$, то удобна формула $x_{1,2}=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$. Следует отметить, что при $D=0$ уравнение имеет один корень кратности два (два одинаковых корня).

Теорема Виета: числа x_1, x_2 являются корнями квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \text{ тогда и только тогда, когда } \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Уравнения с модулем

Основные равносильные переходы:

$$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \qquad |f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{cases}$$

Большинство уравнений и неравенств с модулем можно решить **методом разбиения на промежутки**:

1. Находятся нули всех подмодульных выражений и наносятся на числовую ось. Получается несколько промежутков, на которых все подмодульные выражения имеют постоянный знак, который и определяется (например, подстановкой любого числа из этого промежутка)
2. Отдельно на каждом промежутке решается уравнение или неравенство. Раскрываются все модули, т.е. заменяются подмодульными выражениями со знаком, который уже определен. Далее решается полученное уравнение или неравенство (в котором уже нет модулей) и выбираются решения, принадлежащие данному промежутку.
3. В ответ записываются все решения, найденные на каждом промежутке.

Иррациональные уравнения

Основные равносильные переходы:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0 \left(\text{или } g(x) \ge 0\right) \end{cases} \qquad \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

IV. Алгебраические неравенства

Область допустимых значений (ОДЗ) неравенства – множество всех значений переменной, при которых все функции, входящие в неравенство, имеют смысл.

Решения неравенства – такие значения переменной, которые при подстановке в неравенство обращают его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство означает найти все его решения или доказать, что их нет.

Неравенства называют *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Основная идея решения неравенства заключается в замене неравенства более простым, равносильным данному. Правила равносильных преобразований:

1) любой член неравенства можно перенести из одной части в другую с противоположным знаком, оставив без изменения при этом знак неравенства;
2) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, оставив при этом без изменения знак неравенства;
3) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и тоже отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.

Пусть заданное неравенство имеет вид $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ (или с любым из знаков $<$, $\le$, $\ge$; вместе с тем $g(x)$ может быть равна 1) или оно приведено к этому виду с помощью вышеуказанных правил. Для решения неравенства применяется **обобщенный метод интервалов**:

1. Находится ОДЗ неравенства.
2. Находятся *критические точки неравенства*: корни уравнений $f(x)=0$ и $g(x)=0$.
3. На числовую ось наносятся ОДЗ и критические точки. Точки, принадлежащие ОДЗ, отмечаются закрашенными кружками (●), а не принадлежащие ОДЗ – светлыми (проколотыми) кружками (○). Эти точки разбивают ОДЗ на несколько промежутков, в каждом из которых левая часть неравенства будет сохранять знак (плюс или минус).
4. Определяется знак левой части неравенства на каждом промежутке, вычисляя, например, значение левой части для одной из точек промежутка.
5. Решениями неравенства будут все промежутки из ОДЗ, знак на которых соответствует знаку неравенства. Если исходное неравенство нестрогое (со знаком $\le$, $\ge$), то решениями будут и все критические точки, отмеченные закрашенными кружками.

Неравенства с модулем

Основные равносильные переходы:

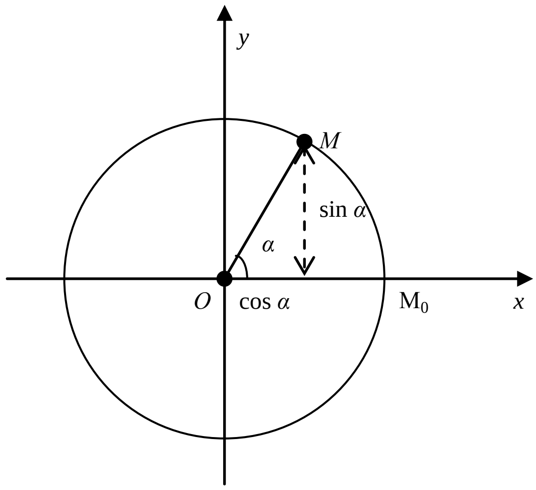
$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x) \end{cases} \qquad |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array} \right.$$

$$|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x) \end{cases} \qquad |f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x) \end{array} \right.$$

V. Преобразования тригонометрических выражений

Функции синус, косинус, тангенс, котангенс называются *основными тригонометрическими функциями*. По определению *синусом* (соответственно, *косинусом*) числа α называется ордината (соответственно, абсцисса) точки M на тригонометрическом круге единичного радиуса (см. рис.), получающейся поворотом точки $M_0(1;0)$ на угол α радиан вокруг начала координат; кроме того , $tg\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ при $\cos\alpha \ne 0$, т.е. $\alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in Z)$,

$$ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ при } \sin\alpha \ne 0, \text{ т.е. } \alpha \ne \pi n \quad (n \in Z).$$



Положительные углы откладываются против часовой стрелки, отрицательные – по часовой стрелке.

Основное соотношение между радианной и градусной мерами угла: $180° = \pi$.

Таблица основных значений тригонометрических функций:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$
$30°\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Функции синус, тангенс и котангенс являются нечетными, а функция косинус – четная, т.е. для всех допустимых значений x выполняются равенства:

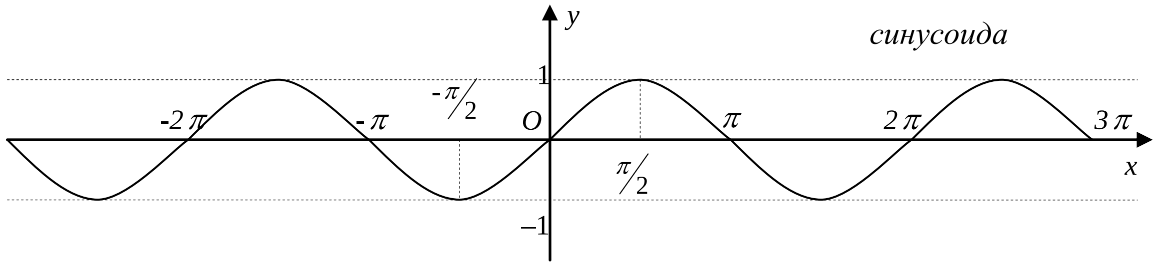
$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad tg(-x) = -tg\,x, \quad ctg(-x) = -ctg\,x.$$

Функции синус и косинус – периодические с периодом 2π, а функции тангенс и котангенс – периодические с периодом π. Для всех допустимых значений x и для всех $n \in Z$ выполняются равенства:

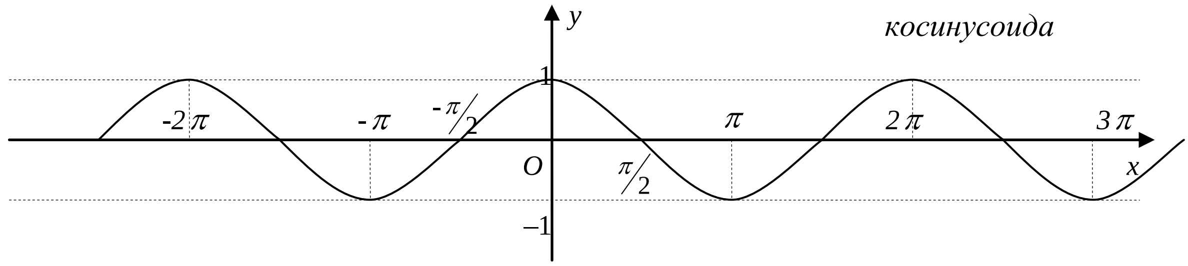
$$\sin(x + 2\pi n) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi n) = \cos x, \quad tg(x + \pi n) = tgx, \quad ctg(x + \pi n) = ctgx.$$

Графики тригонометрических функций

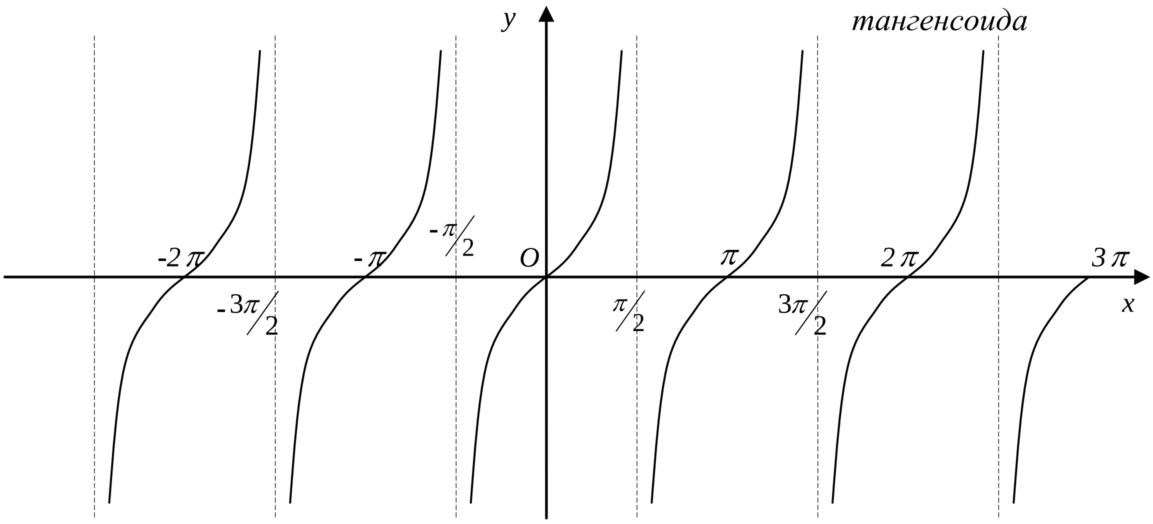
$y = \sin x$



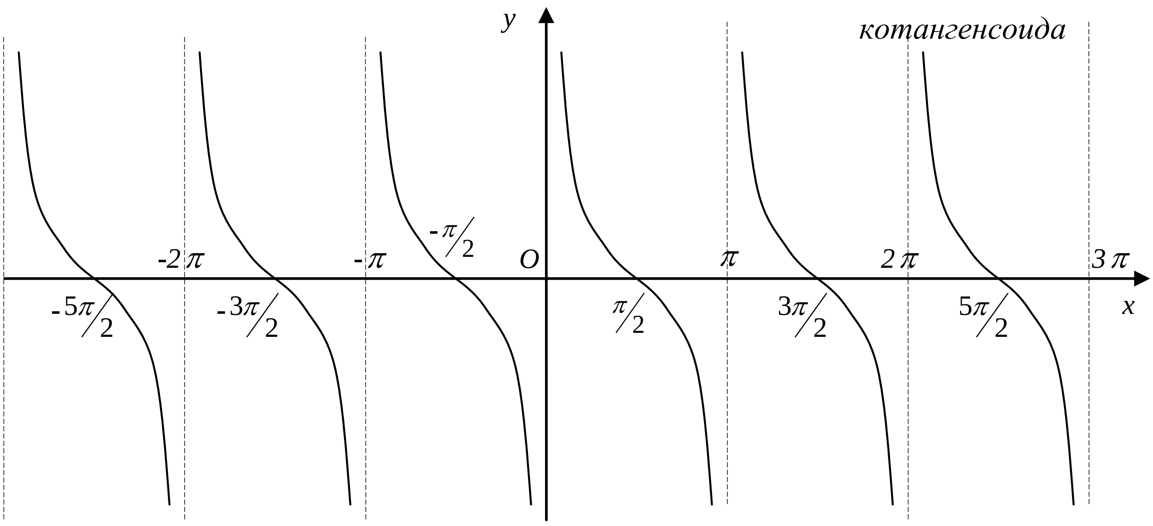
$y = \cos x$



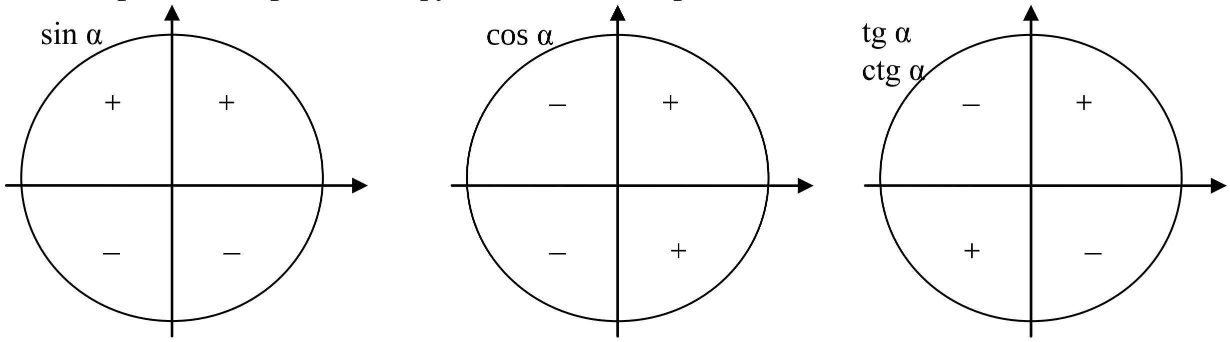
$y = tg\, x$



$y = ctg\, x$



Знаки тригонометрических функций по четвертям



Формулы приведения – формулы, позволяющие упрощать выражения вида $\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ tg\\ ctg\end{matrix}\right|\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right)$.

x	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tgx	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$ctgx$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Для облегчения запоминания указанных (и не указанных для других $n\in Z$) в таблице формул приведения можно применять следующее *мнемоническое правило*:

1) если угол α откладывается от горизонтального диаметра тригонометрического круга, то название функции сохраняется; если угол α откладывается от вертикального диаметра тригонометрического круга, то название функции меняется (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс);

2) перед полученной функцией ставится тот знак, который имела бы начальная функция в той четверти, в которую попадет изначальный аргумент (при этом предполагается, что α – острый угол).

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\qquad tg\,x\cdot ctg\,x=1$

$1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x},\quad 1+ctg^2x=\frac{1}{\sin^2 x}$

Формулы сложения

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

$$tg(x+y)=\frac{tg\,x+tg\,y}{1-tg\,x\cdot tg\,y}$$

$$tg(x-y)=\frac{tg\,x-tg\,y}{1+tg\,x\cdot tg\,y}$$

Формулы преобразования суммы (разности) функций в произведение

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$tg\ x + tg\ y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$tg\ x - tg\ y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

Формулы преобразования произведения функций в сумму (разность)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$$

Формулы понижения степени

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

Формулы универсальной подстановки

$$\sin 2x = \frac{2tg\ x}{1+tg^2 x}$$

$$\cos 2x = \frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}$$

$$tg\, 2x = \frac{2tg\ x}{1-tg^2 x}$$

Формулы тройного угла

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Формула «гармонического сложения»

$$A\sin x \pm B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\cos\varphi \sin x \pm \sin\varphi \cos x\right) =$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\sin(x\pm\varphi), \quad \text{где}\ \varphi = \arcsin\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} - \text{вспомогательный угол}$$

Важные неравенства

$$|\sin x| \le 1, \ |\cos x| \le 1$$

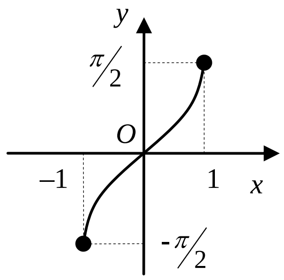
$$|A\sin x \pm B\cos x| \le \sqrt{A^2+B^2}$$

$\sin x < x < tg\ x$, где $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Обратные тригонометрические функции

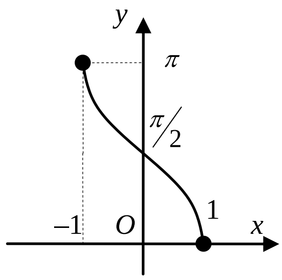
Для функции $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ существует обратная функция. Эта функция $y = \arcsin x$ определена на отрезке $[-1;1]$ с областью значений $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. График функции – часть синусоиды, расположенной вдоль оси ординат:

$$\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1,1]$$
$$\arcsin(\sin x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$



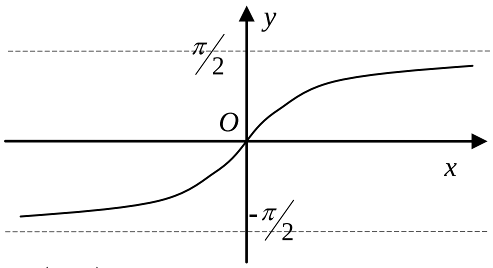
Для функции $y = \cos x$ на промежутке $[0;\pi]$ существует обратная функция. Это функция $y = \arccos x$, $x \in [-1;1]$ с областью значений $[0;\pi]$. График функции – часть косинусоиды, расположенной вдоль оси ординат:

$$\cos(\arccos x) = x, x \in [-1,1]$$
$$\arccos(\cos x) = x, x \in [0,\pi]$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$



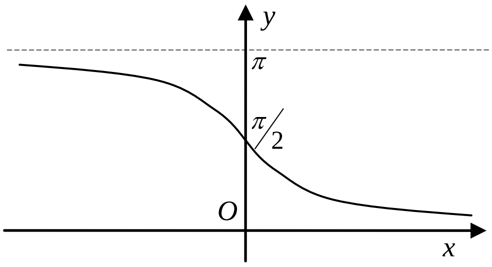
Для функции $y = tg\, x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ существует обратная функция. Это функция $y = arctg\, x$, $x \in (-\infty;+\infty)$ с областью значений $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. График функции – часть тангенсоиды, расположенной вдоль оси абсцисс:

$$tg(arctgx) = x, x \in (-\infty,+\infty)$$
$$arctg(tgx) = x, x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$
$$arctg(-x) = -arctgx$$



Для функции $y = ctg\, x$ на промежутке $(0;\pi)$ существует обратная функция. Это функция $y = arcctg\, x$, $x \in (-\infty;+\infty)$ с областью значений $(0;\pi)$. График функции – часть котангенсоиды, расположенной вдоль оси абсцисс:

$$ctg(arcctgx) = x, x \in (-\infty,+\infty)$$
$$arcctg(ctgx) = x, x \in (0,\pi)$$
$$arcctg(-x) = \pi - arcctgx$$



VI. Тригонометрические уравнения

Основные равносильные переходы:

$\sin x = a, |a| \le 1 \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$

или иная форма:

$$\sin x = a, |a| \le 1 \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi k, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

$\cos x = a, |a| \le 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$

$tg\, x = a, a \in R \Leftrightarrow x = arctg\, a + \pi k, k \in Z$

$ctg\, x = a, a \in R \Leftrightarrow x = arcctg\, a + \pi k, k \in Z$

частные случаи:

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k, k \in Z$

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in Z$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in Z$

VII. Прогрессии

Арифметическая прогрессия (a_n) – последовательность чисел (конечная или бесконечная), каждый член которой равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (d – разность прогрессии). Т.е. $a_n = a_{n-1} + d, n \ge 2$. Основной способ описать арифметическую прогрессию – задать a_1 и d.

$a_n = a_1 + d(n-1)$ – формула *n*-го члена

$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n \ge 2$ – характеристическое свойство

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ – формула суммы первых *n* членов

Геометрическая прогрессия (b_n) – последовательность чисел (конечная или бесконечная), каждый член которой равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $q \ne 0$ (q – знаменатель прогрессии). Т.е. $b_n = b_{n-1} \cdot q, n \ge 2$. Основной способ описать геометрическую прогрессию – задать b_1 и q.

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ – формула *n*-го члена

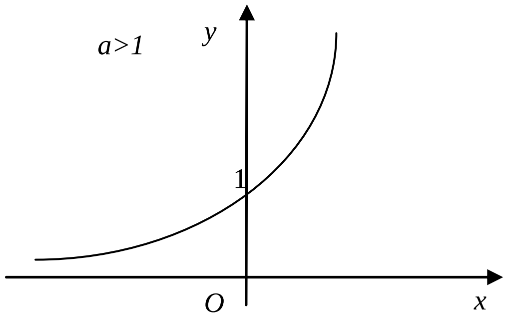
$b_n^{\,2} = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, n \ge 2$ – характеристическое свойство

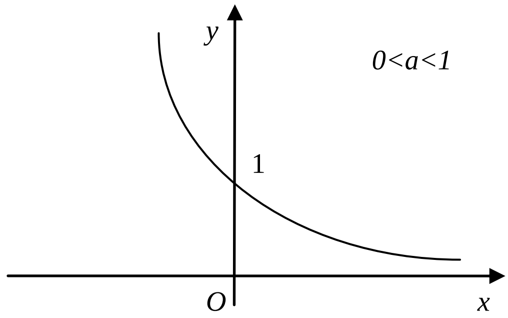
$S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, q \ne 1$ – формула суммы первых *n* членов

Если $|q| < 1$, то $S = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \dfrac{b_1}{1-q}$ – сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии

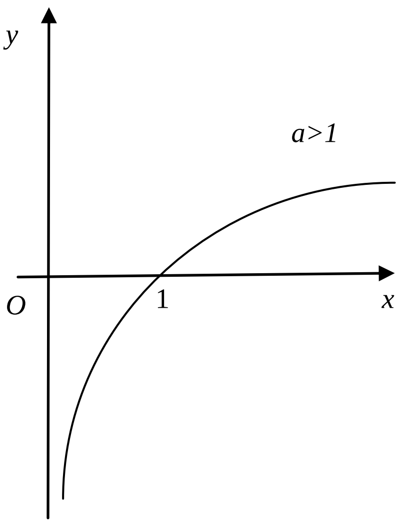
VIII. Преобразования логарифмических выражений

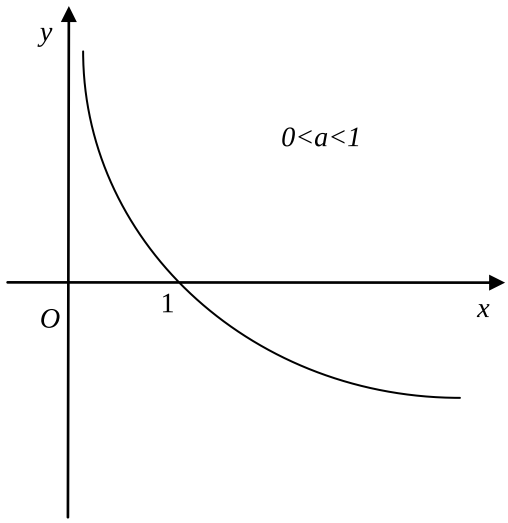
Показательная функция задается формулой $y = a^x$ при $a > 0$, $a \neq 1$.
Область определения – $D(f) = R$, область значений – $E(f) = (0;+\infty)$, т.е. $a^x > 0$ при любом x.
Функция монотонна: возрастающая при $a > 1$ и убывающая при $0 < a < 1$. Графиком функции является кривая, называемая *экспонентой*; ось абсцисс – горизонтальная асимптота графика. Точка с координатами $(0;1)$– характерная точка графика (при любом a график проходит через эту точку).





Логарифмическая функция задается формулой $y = \log_a x$ при $a > 0$, $a \neq 1$. (По определению логарифма $a^y = x$).
Область определения – $D(f) = (0;+\infty)$, область значений – $E(f) = R$.
Функция монотонна: возрастающая при $a > 1$ и убывающая при $0 < a < 1$. Показательная и логарифмическая функции при фиксированном значении a являются взаимно обратными. Графиком функции является также экспонента, только расположенная иначе: ось ординат – вертикальная асимптота графика. Точка с координатами $(1;0)$– характерная точка графика.





При $a = 10$ логарифм называется *десятичным* и обозначается $\lg x$.
$x = a^{\log_a x}$ – основное логарифмическое тождество

Для любых $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$ верны равенства:

$\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

$\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$, $x \neq 1$

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, $b > 0$, $b \neq 1$ – формула перехода к новому основанию

$a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$, $b > 0$, $b \neq 1$

$a^{\sqrt{\log_a x}} = x^{\sqrt{\log_x a}}$, $x \neq 1$

IX. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Основные равносильные переходы для уравнений:

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ (или, что то же самое $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$)

Следует помнить при решении уравнений, что $\log_a [f(x)]^{2n} = 2n \cdot \log_a |f(x)|$.

Показательные неравенства

при $a > 1$: $\begin{matrix} a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x) \\ a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \end{matrix}$;

при $0 < a < 1$: $\begin{matrix} a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \\ a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x) \end{matrix}$ (знаки неравенств меняются)

Логарифмические неравенства

при $a > 1$: $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$;

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$;

при $0 < a < 1$: $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$;

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Геометрия

I. Треугольник

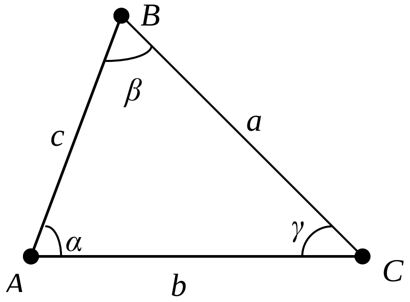
Обозначения: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – *полупериметр*, R – *радиус описанной окружности*, r – *радиус вписанной окружности*, S – *площадь*, h_a – *высота, проведенная к стороне* a, m_a – *медиана, проведенная к стороне* a, l_a – *биссектриса, проведенная к стороне* a.

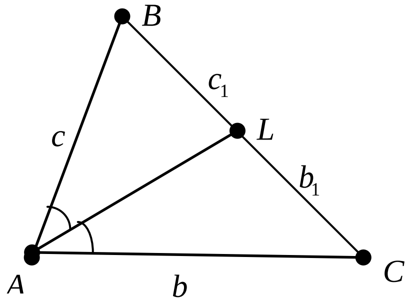
Формулы площади: $S = \dfrac{1}{2} a \cdot h_a$, $S = \dfrac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha$, $S = pr$, $S = \dfrac{abc}{4R}$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Сумма углов треугольника равна $180°$.

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.





$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ – длина медианы

AL – биссектриса: $AL = \sqrt{bc - b_1c_1}$.

Биссектриса AL угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, т.е. $\frac{c}{b} = \frac{c_1}{b_1}$.

Средняя линия треугольника (отрезок, который соединяет середины двух сторон) параллельна его третьей стороне и равна ее половине.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

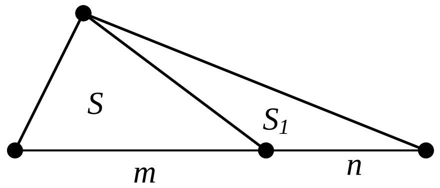
Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

Точка пересечения биссектрис – центр вписанной окружности.

Точка пересечения серединных перпендикуляров – центр описанной окружности.

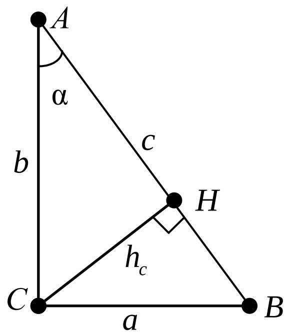
Пусть $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия k (т.е. $k = \frac{AB}{A_1B_1}$), тогда отношение площадей равно: $\frac{S}{S_1} = k^2$.

Свойство смежных площадей:



$$\frac{S}{S_1} = \frac{m}{n}$$

Прямоугольный треугольник



CH – высота, AH – проекция катета AC на гипотенузу *AB*, *BH – проекция катета BC*

$S = \frac{1}{2}ab$, $S = \frac{1}{2}ch_c$

$r = \frac{a+b-c}{2}$, $R = \frac{c}{2}$, середина гипотенузы – центр описанной окружности.

$CH^2 = AH \cdot BH$, $AC^2 = AH \cdot AB$, $BC^2 = BH \cdot AB$

Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$.

Тригонометрические соотношения: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$, $ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$.

Равносторонний треугольник (со стороной a): $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

II. Четырехугольники

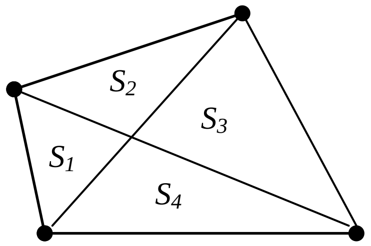
В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны. Площадь такого четырехугольника: $S = pr$, где p – полупериметр, r – радиус вписанной окружности.

Вокруг четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных углов равны $180°$.

Площадь произвольного выпуклого (диагонали пересекаются) четырехугольника:

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$, где d_1, d_2 – диагонали, φ – угол между ними.

Для любого выпуклого четырехугольника выполняется соотношение:



$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

Пусть a, b – стороны, α – угол между ними, h_a – высота, проведенная к стороне a:

площадь параллелограмма: $S = ah_a = ab\sin\alpha$,

площадь ромба: $S = ah_a = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2$,

площадь прямоугольника: $S = ab$,

площадь квадрата: $S = a^2$.

Для параллелограмма со сторонами a, b и диагоналями d_1, d_2 выполняется:

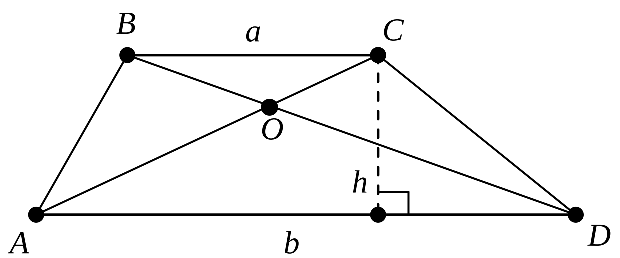
$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов.

В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он – ромб. Диаметр окружности совпадает с высотой ромба.

Вокруг параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда он – прямоугольник. Диаметр окружности совпадает с диагональю прямоугольника.

Трапеция



$S = \frac{a+b}{2}h$ – площадь трапеции

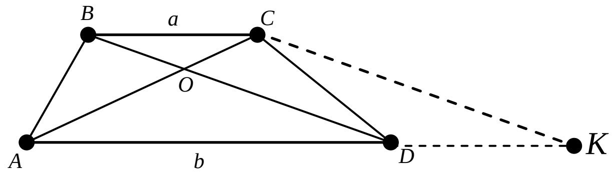
$\Delta BOC \sim \Delta DOA, \quad S_{ABO} = S_{DCO}$

Средняя линия трапеции (отрезок, соединяющий середины боковых сторон) параллельна основаниям и равна их полусумме. Также она делит каждую диагональ и высоту пополам.

Биссектрисы углов, которые прилегают к одной боковой стороне трапеции, пересекаются под прямым углом и точка их пересечения принадлежит средней линии трапеции.

Вокруг трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобедренная.

Если провести CK параллельно диагонали BD до пересечения с продолжением основания AD, то площадь трапеции $ABCD$ будет равна площади образовавшегося треугольника ACK.



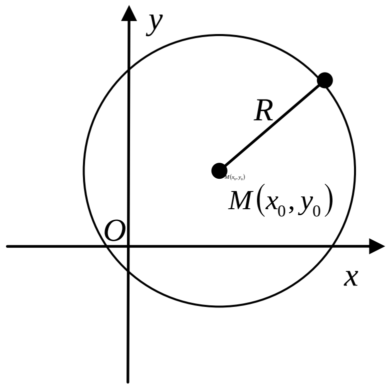
III. Окружность и круг

$L = 2\pi R$ – длина окружности

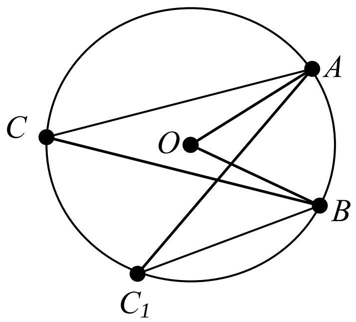
$S = \pi R^2$ – площадь круга

Уравнение окружности

В прямоугольной системе координат xOy окружность с центром в точке $M(x_0, y_0)$ и радиусом R задается уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.



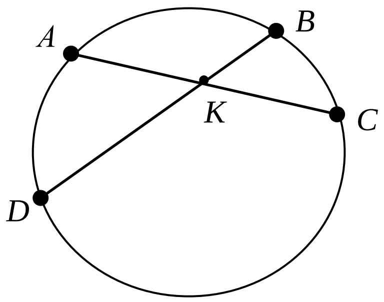
Центральный и вписанные углы:



$$\underbrace{\angle ACB = \angle AC_1B}_{\substack{\text{вписанные углы,} \\ \text{опирающиеся на одну дугу}}} = \frac{1}{2}\underbrace{\angle AOB}_{\text{центральный}}$$

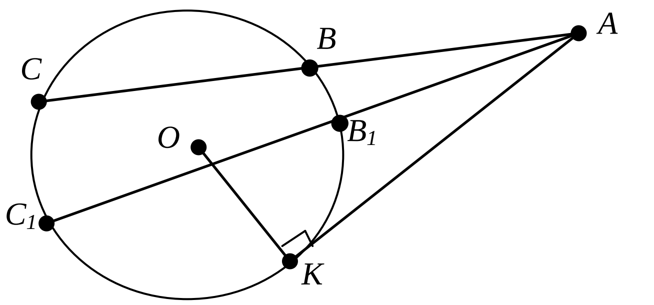
Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, – прямой.

Свойство пересекающихся хорд:

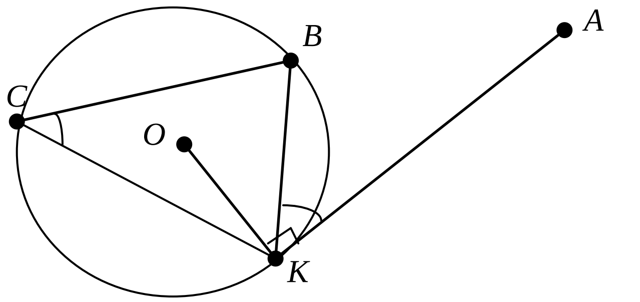


$$AK \cdot KC = DK \cdot KB$$

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу окружности, проведенному в точку касания. Свойство секущих и касательной:

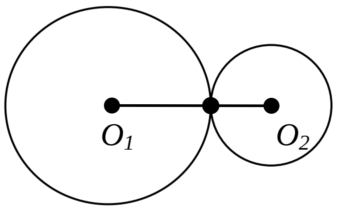


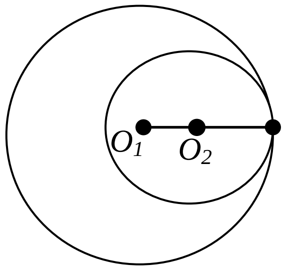
$$AB \cdot AC = AB_1 \cdot AC_1 = AK^2$$



$$\angle AKB = \angle BCK$$

Линия центров O_1O_2 (прямая, соединяющая центры) двух касающихся окружностей проходит через точку касания. Окружности могут касаться внешним образом и внутренним (одна лежит внутри другой).





$O_1O_2 = R_1 + R_2$ $\qquad$ $O_1O_2 = R_1 - R_2$

IV. Стереометрия

Обозначения: H – высота, $S_{осн}$ – площадь основания, $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности, $S_{полн}$ – площадь полной поверхности, V – объем, R – радиус основания цилиндра, конуса или радиус сферы (шара), P – периметр основания.

Призма: $V = S_{осн} \cdot H$.

Прямая призма: $V = S_{осн} \cdot H$, $S_{бок} = P \cdot H$, $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$.

Прямоугольный параллелепипед: $V = abc$, $S_{полн} = 2(ab + bc + ac)$, где a, b, c – длина, ширина, высота.

Куб: $V = a^3$, $S_{полн} = 6a^2$.

Пирамида: $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$.

Правильная пирамида: $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, $S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot l$, $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$, где l – апофема (высота боковой грани).

Произвольная усеченная пирамида: $V = \frac{1}{3} H\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$, где S_1, S_2 – площади оснований.

Цилиндр: $V = \pi R^2 H$, $S_{бок} = 2\pi RH$, $S_{полн} = 2\pi R(H + R)$.

Конус: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, $S_{бок} = \pi Rl$, $S_{полн} = \pi R(l + R)$, где l – образующая.

Шар, сфера: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $S_{полн} = S_{сферы} = 4\pi R^2$.

Если в какое-либо геометрическое тело вписана сфера, то его объём равен одной трети его полной поверхности на радиус вписанной сферы:

$$V_{тела} = \frac{1}{3} S_{полной\,поверхности} \cdot r_{вписанной\,сферы}.$$

Если все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около основания (и наоборот).

Если все боковые ребра пирамиды между собой равны, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около основания (и наоборот).

Если все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания равные двугранные углы, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, вписанной в основание (и наоборот).

Если длины апофем всех боковых граней между собой равны, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, вписанной в основание (и наоборот).